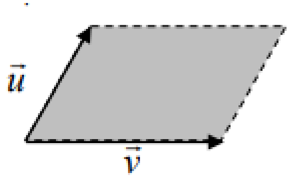
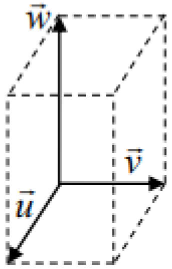
Operació	Com calcular	Algunes propietats	Interpretació geomètrica
Producte escalar	$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert\cdot cos\alpha$	• És un **número** • $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$	• Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són vectors no nuls: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$ (són **perpendiculars**)
Norma o mòdul	$\vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$	• És un **valor positiu**	• Representa la **longitud** del vector$\vec{u}$
Producte vectorial	$\vec{u}\,x\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$	• És un **vector perpendicular** als vectores que es multipliquen. • El seu sentint ve donat per la regla del tornavís • El mòdul és: $\vec{u}\,x\,\vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert\cdot sin\alpha$ • $\vec{u}\,x\,\vec{v} = -\vec{v}\,x\,\vec{u}$	• Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$s són vectors no nuls: $\vec{u}\times\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$ (són **paral·lels**) • **El mòdul és l'àrea** del paral·lelogram generat por ambdós vectors. 
Producte mixt	$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$	• És un **nombre** • Es un determinant, per la qual les seves propietats són les mateixes que les d'aquests.	• El seu valor absolut representa el volum del paral·lelepípede format pels tres vectors 

EQUACIONS DEL PLA

Per determinar l'equació del pla necessitarem disposar d'un dels següents grups d'elements:

1)	***Tres punts** del pla*	*2)*	***Dos vectors** directors del pla i **un punt** d'aquest*	*3)*	*Un **vector normal** al pla i **un punt** d'aquest*

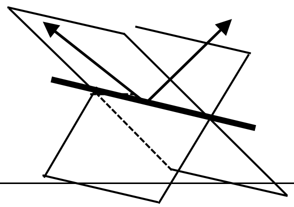
EQUACIÓ	EXPRESSIÓ ANALÍTICA	UN PUNT	VECTORS DIRECTORS	VECTOR NORMAL
Vectorial	$(x,y,z)=(a,b,c)+\lambda\cdot(u_1,u_2,u_3)+\mu\cdot(v_1,v_2,v_3)$	$P=(a,\ b,\ c)$	$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$	$\vec{n}=\vec{u}\ x\ \vec{v}$
Paramètrica	$\begin{cases} x=a+\lambda\cdot u_1+\mu\cdot v_1 \\ y=b+\lambda\cdot u_2+\mu\cdot v_2 \\ z=c+\lambda\cdot u_3+\mu\cdot v_3 \end{cases}$			
General o Implícita	$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow A\,x+By+Cz+D=0$	*Donar valor a **dos** de les incògnites i aïllar la tercera*	*Extreure dos punts i restar-los per obtenir un vector director o **passar l'equació a paramètrica***	$\vec{n}=(A,\ B,\ C)$

EQUACIONS DE LA RECTA

Per determinar l'equació d'una recta hem de disposar d'un dels següents grups d'elements:

1)	***Dos punts*** *de la recta*	2)	*Un* ***vector director*** *de la recta i* ***un punt*** *d'aquesta*

EQUACIÓ	EXPRESSIÓ ANALÍTICA	UN PUNT	VECTOR DIRECTOR	VECTOR NORMAL
Vectorial	$(x,y,z)=(a,b,c)+\lambda\cdot(u_1,u_2,u_3)$	$P=(a,\ b,\ c)$	$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$	*Una recta té infinits vectors normals. Si desitgem obtenir-ne un hem de calcular un que compleixi:,* $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ *Si, per exemple fem* $u_3\neq 0$ $\vec{n}=\left(0,1,-\frac{u_2}{u_3}\right)$
Paramètrica	$\begin{cases} x=a+\lambda\cdot u_1 \\ y=b+\lambda\cdot u_2 \\ z=c+\lambda\cdot u_3 \end{cases}$			
Contínua	$\frac{x-a}{u_1}=\frac{y-b}{u_2}=\frac{z-c}{u_3}$			

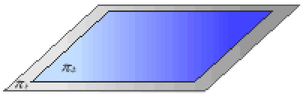
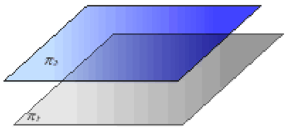
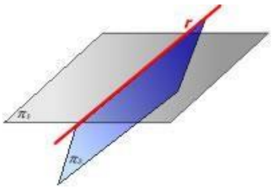
EQUACIÓ	EXPRESSIÓ ANALÍTICA	UN PUNT	VECTOR DIRECTOR
Com intersecció de dos plans	$\left.\begin{matrix} \frac{x-a}{u_1}=\frac{y-b}{u_2} \\ \frac{y-b}{u_2}=\frac{z-c}{u_3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{matrix}\right\}$	*Donar valor a* ***una*** *de les incògnites i aïllar les dues restants*	*Multiplicant vectorialmentels vectors normals dels plans* $\vec{u}=(A,B,C)\times(A',B',C')$ 

POSICIONS RELATIVES A L'ESPAI

Per determinar la posició relativa de dos o més cossos (rectes o plans) a l'espai, simplement cal discutir el sistema format per las equacions de cada un dels objectes i relacionar-los amb la posició adequada. No obstant, en algunes ocasions existeixen tècniques més ràpides i senzilles que ens permeten saber la posició relativa de diversos cossos sense recórrer a la discussió del sistema.

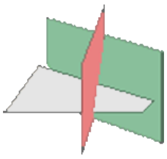
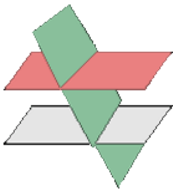
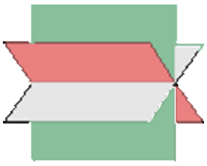
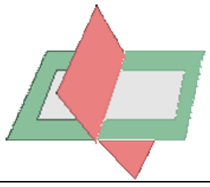
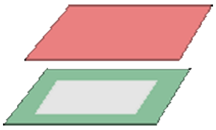
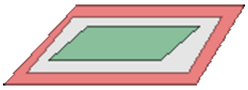
1. Posició relativa de dosplans

$$\pi_1 \equiv Ax+By+Cz+D=0$$
$$\pi_2 \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$$

POSICIÓN	DISCUSIÓN DEL SISTEMA	ALTRE MÈTODE	REPRESENTACIÓ
Coincidents	$Rg(A)=Rg(A^*)=1$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$	
Paral·lels	$Rg(A)\neq Rg(A^*)$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$	
Secants	$Rg(A)=Rg(A^*)=2$	Si no són coincidents ni paral·lels	

2. Posició relativa de tre splans:

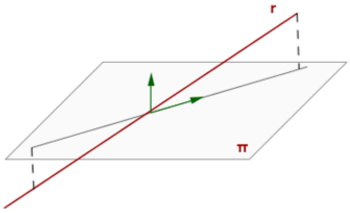
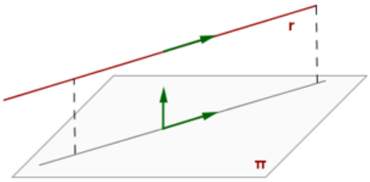
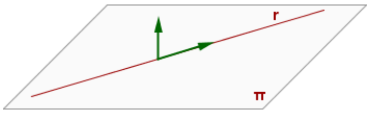
$$\pi_1 \equiv Ax+By+Cz+D=0$$
$$\pi_2 \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$$
$$\pi_3 \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0$$

$Rg(A)$	$Rg(A^*)$	POSICIÓ	REPRESENTACIÓ
3	3	Els plans es tallen en un únic punt	
2	3	Plans secants dos a dos	
2	2	Els plans es tallen en una recta	 
1	2	Plans paral·lels o dos coincidents i el restant paral·lel	
1	1	Plans coincidents	

3. Posició relativa de recta-pla

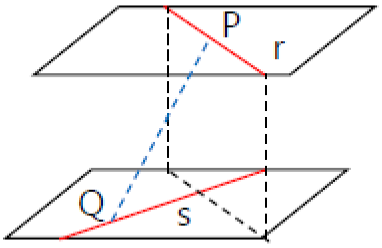
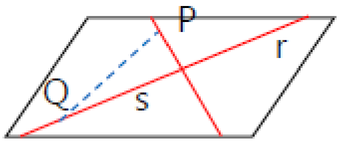
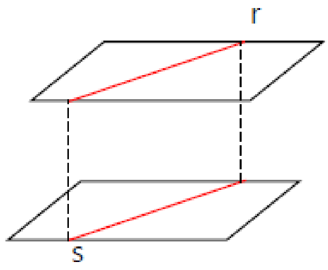
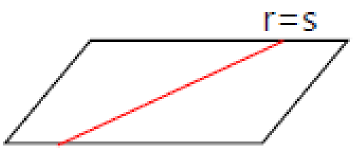
$$\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$$

$$r \equiv \begin{cases} A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{cases}$$

POSICIÓ	DISCUSSIÓ DEL SISTEMA	UN ALTRE MÈTODE $\vec{n} \equiv$ *normal del pla* $\vec{u} \equiv$ *director de la recta*	REPRESENTACIÓ
Secants	$Rg(A) = Rg(A^*) = 3$	$\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$	
Paral·lels	$Rg(A) \neq Rg(A^*)$	$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ i un puntde r no està al pla π	
Recta continguda al pla	$Rg(A) = Rg(A^*) = 2$	$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ i un puntde r està al pla π	

4. Posició relativa de dosrectes:

$$r_1 \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases}$$

POSICIÓ	**DISCUSSIÓ DEL SISTEMA**	**UN ALTRE MÈTODE** $\vec{u}$ vector director de la recta r_1 $\vec{v}$ vector director de la recta r_2 $\vec{w}$ vector $\overrightarrow{PQ}$		**REPRESENTACIÓ**
Es creuen	$Rg(A^*) = 4$	$\vec{u}$ i $\vec{v}$ **no són proporcionals**	$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$	
Secants	$Rg(A) = Rg(A^*) = 3$		$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$	
Paral·leles	$Rg(A) \neq Rg(A^*) < 4$	$\vec{u}$ i $\vec{v}$ són **proporcionals**	Un punt de la primera recta **no estarà** a l'altra	
Coincidents	$Rg(A) = Rg(A^*) = 2$		Un punt de la primera recta **sempre estarà** en l'altra	

PROPIETATS MÈTRIQUES

1. Distàncies

Posició	Equacions	Fórmula
Punt-punt	$P(a, b, c)$ $Q(a', b', c')$	$d(P,Q)=\left\|\vec{PQ}\right\|=\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(c'-c)^2}$
Punt-pla	$P(a, b, c)$ $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$	$d(P,\pi)=\dfrac{\left\|A\cdot a+B\cdot b+C\cdot c+D\right\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
Punt-recta	$P(a,b,c)$ $r\equiv \vec{x}=Q+\lambda\cdot\vec{u}$	$d(P,r)=\dfrac{\left\|\vec{PQ}\times\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$
Dos rectes que es creuen	$r\equiv \vec{x}=P+\lambda\cdot\vec{u}$ $s\equiv \vec{x}=Q+\mu\cdot\vec{v}$	$d(r,s)=\dfrac{\left\|\left[\vec{PQ},\vec{u},\vec{v}\right]\right\|}{\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|}$

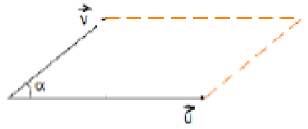
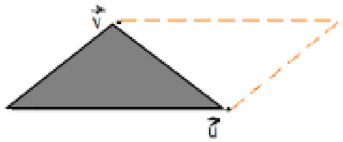
És convenient conèixer el càlcul mitjançant el procediment pel qual no es necessita fórmules.

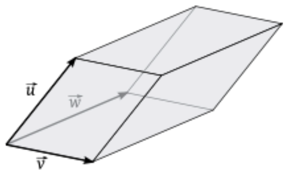
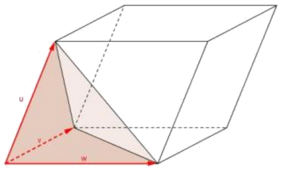
2. Angles

El càlcul de l'angle només té sentit si els cossos en l'espai es tallen o es creuen. En aquests casos, podem determinar l'angle que formen mitjançant les següents expressions

Posició	Equacions	Fórmula
Dos rectes	$\vec{u} \equiv director\ de\ la\ recta\ r_1$ $\vec{v} \equiv director\ de\ la\ recta\ r_2$	$\cos\alpha = \frac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{v}\rvert}{\lVert\vec{u}\rVert\cdot\lVert\vec{v}\rVert}$
Dos plans	$\vec{n} \equiv normal\ del\ plano\ \pi_1$ $\vec{m} \equiv normal\ del\ plano\ \pi_2$	$\cos\alpha = \frac{\lvert\vec{n}\cdot\vec{m}\rvert}{\lVert\vec{n}\rVert\cdot\lVert\vec{m}\rVert}$
Recta i pla	$\vec{u} \equiv director\ de\ la\ recta\ \ r$ $\vec{n} \equiv normal\ del\ plano\ \ \pi$	$sen\,\alpha = \frac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{n}\rvert}{\lVert\vec{u}\rVert\cdot\lVert\vec{n}\rVert}$

3. Àrees i volums

Àrea	Fórmula	Representació
Paral·lelogram	$A = \left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|$	
Triangle	$A = \dfrac{\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|}{2}$	

Volum	Fórmula	Representació
Paral·lelepípede	$V = \left\| \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] \right\|$	
Tetraedre	$V = \dfrac{\left\| \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] \right\|}{6}$